# שאלה 1.

א.

יהי מסלול שכל קשתותיו שימושיות.

חייב להיות מסלול מזערי מ- ל-, שכן הקשת שימושית ולכן קיים מסלול מזערי מ- ל- המסתיים בקשת זו. כל מסלול אחר שמסתיים בקשת זו עלותו תהיה גבוהה או שווה לעלות המסלול שכן יש בו עוד קשתות שמשקלן אי-שלילי ולכן המסלול הוא מזערי.

נניח כי עבור מתקיים ש- מסלול מזערי מ- ל- ונראה כי המסלול הוא מזערי.

מכך שהקשת שימושית נסיק כי קיים מסלול מזערי, , מ- ל- המסתיים בקשת זו.

נניח בשלילה כי עלות המסלול גדולה מעלות המסלול המזערי.

העלות של הקשת האחרונה, , זהה ואי שלילית בשני המסלולים ולכן נסיק כי עלות ללא הקשת האחרונה, , קטנה ממש מעלות המסלול .

אבל זו סתירה משום שלפי ההנחה מסלול מזערי.

לכן נסיק כי אכן הוא מסלול מזערי.

נובע כי כפי שנדרש, מסלול מזערי.

מש"ל.

ב.

יהי מסלול ותהי קשת ב- שהיא הראשונה ש**לא** שימושית.

נסיק כי הוא לא מסלול מזערי מ- ל-. אחרת הייתה קשת אחרונה במסלול מזערי ולכן שימושית.

לכן קיים מסלול שמקיים ובפרט  
 מקיים ולכן **אינו** מזערי.

מש"ל.

ג.

יהי מסלול כמעט מזערי.

קיימת לפחות קשת אחת לא שימושית, אחרת לפי סעיף א', היה מסלול מזערי, בסתירה להיותו כמעט מזערי.

תהי הקשת הראשונה במסלול שהיא לא שימושית.

~~

ברישא של מ- ל-, כל הקשתות שימושיות ולכן לפי סעיף א' המסלול מזערי.

~~

נניח בשלילה כי הסיפא של מ- ל-, אינו מסלול מזערי. אז ישנו מסלול כך שמתקיים .

נסתכל על בו מחליפים את ב-. זהו מסלול שעלותו קטנה משל אך הוא אינו מזערי (לפי סעיף ב') שכן הוא מכיל קשת לא שימושית. לכן נסיק בסתירה כי אינו מסלול כמעט מזערי.

מכך שהגענו לסתירה נסיק כי הסיפא של מ- ל-, הוא אכן מסלול מזערי.

~~

נניח בשלילה כי יש ב- יותר מקשת לא שימושית אחת, אז בסיפא של אחרי יש קשת לא שימושית, נניח .

יהי מסלול שהרישא שלו היא מסלול מזערי מ- ל- והסיפא שלו היא המשך המסלול מ- כמו ב-.

המסלול אינו מזערי, שכן הוא מכיל קשת אחת לפחות שאינה שימושית, , אך עלותו קטנה ממש מזו של משום שעלות הסיפא מ- זהה בשניהם ועלות הרישא ל- ב- היא מינימאלית בניגוד לרישא של בה המסלול הזה אינו מזערי.

כלומר קיבלנו סתירה לכך ש- מסלול כמעט מזערי ונסיק כי ב- **בדיוק** קשת לא שימושית אחת.

~~

מש"ל.

ד.

נריץ את האלגוריתם של דייקסטרה למציאת מסלולים מיניאליים מ- ונשמור את המרחקים לכל קשת ב-. בנוסף נשמור לכל קודקוד מה הקשת שהובילה אליו, .

נריץ את האלגוריתם של דייקסטרה פעם נוספת למציאת מסלולים מיניאליים ל- (נשנה אותו כך שיעבור בכיוון ההפוך של הקשתות) ונשמור את המרחקים לכל קודקוד ב-. בנוסף נשמור לכל קודקוד מה הקשת שהובילה אליו, .

🡨

🡨

לכל קודקוד למעט ו-, 🡨 , עבור על כל הקשתות , אם גדול מ- וקטן מ- אז נעדכן את למרחק הזה ואת לקשת .

אם אז הדפס שגיאה "אין מסלול מתאים".

אחרת 🡨.

המסלול הנדרש הוא המסלול שישוחזר מ- ל- לפי הקשתות שנשמרו בהרצה הראשונה של דייקסטרה, לאחר מכן הקשת (שהיא הקשת הלא שימושית) ולבסוף הקשתות שישוחזרו מההרצה השניה של דייקסטרה עבור המסלול מ- ל-.

~~

זמן ריצה כמו האלגוריתם של דייקסטרה אותו אנו מפעילים פעמיים, שאר החיפוש באלגוריתם רץ על כל הקשתות בזמן ו"נבלע" בזמן זה.

~~

הוכחת נכונות:

כפי שהוכחנו בסעיף ג' כל מסלול כמעט מזערי יחל כמסלול מזערי לקודקוד כלשהו , , לאחר מכן תופיע בו קשת לא שימושית ולאחר מכן ימשיך המסלול כמסלול מזערי .

האלגוריתם שלנו עובר על כל המסלולים במבנה הנ"ל ומוצא מסלול כזה בעל משקל מינימאלי מבין המסלולים שמשקלם גדול ממשקל המסלול המינימאלי , לכן הוא מוצא מסלול כמעט מזערי אם אכן קיים כזה.

אם לא קיים מסלול כמעט מזערי האלגוריתם אכן לא ימצא מסלול שמשקלו גדול ממשקל המסלול המזערי ויחזיר תשובה נכונה גם במקרה זה.

# שאלה 2

הרעיון הוא למצוא את רכיבי הקשירות של לאחר הסרת , כדי לתקן את ולקבל את יש להוסיף את הקשת בעלת המשקל המינימאלי שמחברת בין רכיבי הקשירות הללו.

~~

נסמן .

נסיר מ- את הקשת .

נריץ על מהקודקוד ונקבל באופן כזה את רכיב הקשירות של שהוא קבוצת הקודקודים שמרחקם מ- אינו .

נעבור על הקשתות ב- של הקודקודים של רכיב הקשירות ונמצא קשת בעלת משקל מינימאלי שנכנסת לקודקוד שאינו ברכיב הקשירות.

נוסיף את ל- ונקבל בכך את המתוקן.

~~

זמן ריצה:

הזמן להסרת הקשת הוא .

זמן הריצה ל- הוא משום שהסריקה מבוצעת על עץ שמוכל בגרף .

נשים לב כי הגרף קשיר ולכן . כלומר הזמן למציאת קשת מינימאלית בין רכיבי הקשירות הוא .

הזמן להוספת קשת ל- הוא .

בסה"כ זמן הריצה היא כנדרש.

~~

נכונות:

מובן שקבוצת הקשירות של ב- אינה , אחרת היינו מקבלים לאחר ההסרה גרף קשיר, כלומר לפחות קשתות, ולכן ב- המקורי קשתות לפחות, וזו סתירה להיותו של עץ.

נסמן בתור את קבוצת הקשירות של ב-.

לא ריקה וגם לא ריקה ולכן לפי משפט 4.17 בספר הקשת המינימאלית בין ל- חייבת להיות חלק מכל עץ פורש מינימאלי של .

כעת נניח בשלילה כי העץ אינו עץ פורש מינימאלי, כבר קבענו כי חייבת להיות חלק מכל עץ פורש מינימאלי, אז או שהרכיב ב- שפורש את או שהרכיב ב- שפורש את אינם מינימאליים.

אבל מכך נובע שניתן להפחית את העלות של החלקים הפורשים הללו גם ב- המקורי על ידי החלפתם בעץ פורש מינימאלי לאותה קבוצת קשתות, או . וזו סתירה לכך ש- עץ פורש מינימאלי.

לכן נסיק כי האלגוריתם אכן מוצא עץ פורש מינימאלי.

# שאלה 3

א.

נגדיר לכל את מעגל בעל קודקודים כאשר המשקל של כל הקשתות הוא .

נניח שהקשתות בגרף הן:

העץ הפורש של כזה מעגל חייב להיות "שרוך", כלומר שרשרת של איברים משום שהקשתות שלו נבחרות מתוך הקשתות של הגרף המקורי והוא לא יכול להכיל מעגל (אז בדיוק קשת אחת לא שייכת לעץ פורש מינימאלי).

בה"כ נסמל את ה"שרוך" הזה בתור (כלומר הקשת שהוסרה היא .

אז המרחק בין ל- היה וכעת הוא .

כלומר היחס בין המרחקים הוא והיחס הזה הולך ועולה עם , כנדרש.

ב.

***4.31.א.***

*נוכיח כי לכל זוג צמתים אורכו של המסלול הקצר ביותר ב- הוא לכל היותר פי שלושה מאורכו של המסלול הקצר ביותר ב-.*

*יהי המסלול המינימאלי ב-, אז לכל כל קשת במסלול, או שקיים ב- מסלול קצר-שווה מ-3 פעמים אורכה או שהיא נוספה ל- (זו הלוגיקה של האלגוריתם).*

*בכל מקרה קיים מסלול ב- שמשקלו לכל היותר 3 פעמים .*

*נחבר את המסלולים המתאימים לכל הקשתות במסלול המינימאלי מ- ל- ב- ונקבל מסלול ב- שאורכו קטן או שווה ל-3 פעמים סכום אורכי הקשתות של המסלול המינימאלי ב-, כלומר קטן או שווה ל-3 פעמים אורך המסלול המינימאלי ב-, ולכן אורך המסלול המינימאלי בין ו- ב- הוא לכל היותר 3 פעמים אורך המסלול המינימאלי ב-.*

***4.31.ב.***

*נראה שאין ב- מעגל באורך 3 או 4, לכן המותן של גדול ממש מ-4, ולכן לפי המשפט שמובא בשאלה*

*בפרט ינבע:*

*נניח בשלילה כי קיים מעגל ב- באורך .*

*ותהי הקשת שסגרה את המעגל בעת הבניה של .*

*מאחר והאלגוריתם מוסיף קשתות ל- באופן ממוין מהקשת בעלת המשקל הקטן ביותר לקשת בעלת המשקל הגדול ביותר מתקיים לכל קשת אחרת במעגל, , . בפרט משקל המסלול שכבר קיים ב- לפני הוספת הוא קטן או שווה ל- ומאחר ו- מתקיים שמשקל המסלול קטן או שווה ל- מתקיים שמשקל המסלול קטן או שווה ל-.*

*בכך קיבלנו סתירה לכך ש- נוספה ל-, שהרי כבר קיים ב- מסלול שמ- ל-, המסלול ההפוך מהמסלול שמצאנו, שמשקלו קטן או שווה ל- ולכן האלגוריתם לא יוסיף את ל-.*

*מש"ל.*

# שאלה 4

נוכיח שלכל עץ בינארי לחלוטין ישנה סדרת שכיחויות שהוא אחד מעצי הופמן שלה בכך שנראה אלגוריתם שמוצא את סדרה כזו לכל עץ בינארי לחלוטין.

האלגוריתם הוא פשוט, הוא מקבל תת-עץ בינארי לחלוטין ומספר המופעים בסה"כ שיש לפזר על תת-העץ כאשר גדול או שווה לגובה העץ.

אם הוא העלה ה- האלגוריתם יקבע .

ואחרת עבור תת-עץ בינארי מושרש, חייבים להיות שני בנים שהם תת-עצים, ו-. נפעיל את האלגוריתם על שניהם עם ( הוא עדיין חזקה של משום שניתן לחלק אותו ב- ולקבל חזקה של 2 מספר פעמים כגובה העץ).

על העץ המקורי נפעיל את האלגוריתם עם ערך שהוא חוקי משום ש- גדול או שווה לגובה העץ.

נראה ריצה של האלגוריתם של הופמן שיוצרת חזרה את העץ המקורי.

נשים לב כי עלים בעומק בעץ יקבלו שכיחות , כלומר ככל שהעלה עמוק יותר בעץ כך השכיחות שלו נמוכה יותר.

יהי גובה העץ, אז ראשית יבחרו ע"י האלגוריתם זוגות השכיחויות שהיו בעומק בעץ, שכן משקלם של העלים הללו הוא , מינימאלי מבין כל השכיחויות.

התשובה לשאלה אילו שכיחויות יוצמדו כזוגות לאילו שכיחויות, ומי יהיה הבן השמאלי בכל זוג אינה מוגדרת באופן מדויק, אך בריצה נניח את המקרה (האפשרי) שבו הזוגות יבחרו כפי שהיו בעץ המקורי ויושמו בצד המתאים בעץ המאוחד.

כעת סדרת העצים בעלי השכיחות הכוללת המינימאלית, , כוללת בתוכה את העלים בעומק וזוגות תת-העצים שאוחדו בשלב הקודם (שגם השכיחות הכוללת בהם ), ובמילים אחרות את תתי-העצים שהיו בעומק בעץ המקורי.

שוב בריצה נניח את המקרה (האפשרי) שבו הזוגות יבחרו כפי שהיו בעץ המקורי ויושמו בצד המתאים בעץ המאוחד.

האלגוריתם ממשיך לרוץ באופן דומה כאשר בכל פעם קבוצת תת-העצים המינימאליים הם קבוצת תת-העצים בעומק הנמוך יותר הבא בעץ המקורי, וב- יבחרו הזוגות המתאימים מהעץ המקורי.

בסופו של דבר, לאחר המעבר על תת-העצים שסכום השכיחויות שלהם הוא , הריצה R תיצור בדיוק את העץ המקורי אשר ממנו נוצרה סדרת השכיחויות.